Devoir sur Table 4

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

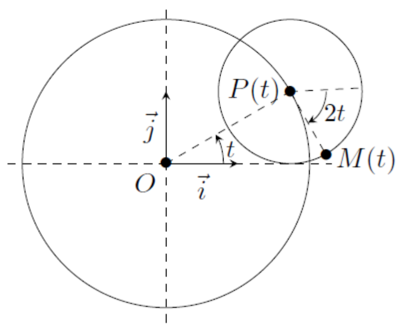
Problème 1 Modélisation d'un manège pour enfant.

(*Banque PT Maths B 2021*)

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Question préliminaire.* Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z.
   (a) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ.
   (b) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$.
   (c) Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$. On note alors $f_{a,\theta} = r_\theta \circ h_a$.
2. *Formules de trigonométrie.* On considère 4 réels a, b, p et q.
   (a) Donner, sans démonstration, la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$.
   (b) En déduire que $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi qu'une factorisation de $\sin(p) + \sin(q)$.
3. Un manège pour enfant est constitué d'une plateforme tournant autour d'un axe, lui même animé d'un mouvement circulaire.

   Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et les mouvements des points $P(t)$ et $M(t)$ sont donnés par :
   • L'affixe complexe du point $P(t)$ est $2e^{it}$,
   • L'affixe complexe du vecteur $\overrightarrow{P(t)M(t)}$ est e^{-2it}.
   On note $z(t)$ l'affixe complexe du point $M(t)$ et Γ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.



   (a) En calculant pour tout réel t l'affixe complexe $z(t)$ du point $M(t)$, démontrer qu'une représentation paramétrique de Γ est $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Pour tout réel t, comparer les affixes complexes de $r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$ et de $M\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)$.
   En déduire que Γ est invariante par une rotation à préciser.

(c) Justifier soigneusement que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
On donnera à chaque étape les transformations à effectuer pour obtenir la courbe Γ en entier.

(d) Calculer $x'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$x'(t) = -2\sin(t)(1+2\cos(t)) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right).$$

(e) Calculer $y'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$y'(t) = 2(1-\cos(t))(1+2\cos(t)) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

(f) Dresser les tableaux de variation des fonctions x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
On précisera les valeurs prises aux bornes de cet intervalle.

(g) Déterminer une équation de la tangente à Γ au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et vérifier qu'elle passe par le point A de coordonnées $(2, 0)$.

(h) Déterminer la nature du point $M(0)$ et préciser la tangente à Γ en ce point.

(i) Tracer Γ ainsi que ses tangentes déterminées précédemment sur la feuille de papier millimétrée fournie. On utilisera des couleurs différentes pour les différentes étapes de la construction sans oublier la légende. On donne $\sqrt{3} \approx 1,73$.
Unité : 3 cm.

Problème 2

(*CCP PC 2013*)

L'objectif du problème est d'étudier des conditions pour que deux matrices admettent un **vecteur propre commun** *Les parties I et III traitent chacune de cas particuliers en dimension 3 et n. Elles sont indépendantes l'une de l'autre. La partie II aborde la situation générale en faisant apparaître une condition nécessaire et certaines autres conditions suffisantes à l'existence d'un vecteur propre commun.*

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$et $Im_\lambda(M) = \mathrm{Im}(M - \lambda I_n)$.

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on définit $[A, B] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par la formule : $[A, B] = AB - BA$.

Pour $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ on définit l'endomorphisme $[f, g]$ de E par la formule : $[f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I — Étude dans un cas particulier

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ où $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note aussi $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer le spectre de A.
   (b) Vérifier que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
   (c) A est-elle diagonalisable ?
   (d) Montrer qu'aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.
2. (a) Déterminer le spectre de B.

(b) Montrer que $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_4)$ et que $\dim(E_2(B)) = 2$.

(c) B est-elle diagonalisable ?

3. (a) Montrer que $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(\mathbf{u}_5)$.

   (b) Déterminer tous les vecteurs propres communs à A et B.

4. (a) Vérifier que $[A, B] = C$.

   (b) Montrer que C est semblable à la matrice D et déterminer le rang de C.

Partie II — Une condition nécessaire et suffisante

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

1. Dans cette question, on suppose que $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B.
   (a) Montrer que $\mathbf{e} \in \mathrm{Ker}([A, B])$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Rg}([A, B]) < n$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On dit que A et B vérifient la **propriété $\mathcal{H}$** s'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que :

$$E_\lambda(A) \subset \mathrm{Ker}([A, B]).$$

3. Montrer que si $[A, B] = 0_n$, alors A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
4. Dans cette question, on suppose que A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.
   (a) Pour tout $X \in E_\lambda(A)$, on pose $\psi(X) = BX$. Montrer que ψ définit un endomorphisme de $E_\lambda(A)$.
   (b) En déduire l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.

   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}_k$ la propriété suivante :

   $\mathcal{P}_k$: *Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension k et pour tout couple d'endomorphismes (φ, ψ) de E tels que $\mathrm{Rg}([\varphi, \psi]) \leqslant 1$, il existe un vecteur propre commun à φ et ψ.*
5. Vérifier la propriété $\mathcal{P}_1$.
6. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_k$ **est vérifiée pour tout entier** $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que A et B **ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$**.
   On note $C = [A, B]$, on suppose que $\mathrm{Rg}(C) = 1$ et on considère $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.
   (a) Justifier l'existence de $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.
   (b) Vérifier que $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ où $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}_\lambda(A)$.
   (d) Établir les inégalités suivantes : $1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(A)) \leqslant n - 1$.

   Pour tout $X \in \mathrm{Im}_\lambda(A)$, on pose $\varphi(X) = AX$ et $\psi(X) = BX$.
   (e) Montrer que $[A, A - \lambda I_n] = 0_n$ et $[B, A - \lambda I_n] = -C$.
   En déduire que φ et ψ définissent des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(A)$.
   (f) Montrer l'existence d'un vecteur propre commun à φ et ψ ; en déduire qu'il en est de même pour A et B.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Partie III — Étude d'un autre cas particulier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{C}_{2n}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour $P \in E$, on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme P de E, on pose $f(P) = P'$ et $g(P) = X^{2n} P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

1. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Montrer que $g(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.
2. Montrer que f et g définissent des endomorphismes de E.
3. (a) Vérifier que si P est un vecteur propre de g, alors $\deg(P) \geqslant n$.

(b) Montrer que X^n est un vecteur propre de g.

Soit $i \in [\![1, 2n]\!]$. f^i correspond à la composée $f \circ f \circ \cdots \circ f$ où f est prise i fois.

4. (a) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}$.
5. Montrer que f^i et g possèdent un vecteur propre commun si et seulement si $i \geqslant n+1$.

$\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de E définie par : $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^{2n})$.
On note A_n la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_c$ et B_n celle de g dans la même base.

6. Déterminer A_n et B_n.
7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
   (a) Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de $(A_1)^2$ et $(A_1)^3$.
   (b) Déterminer le rang de $[(A_1)^i, B_1]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.
   (c) En déduire que la condition nécessaire de la question II.1.b n'est pas suffisante et que la condition suffisante de la question II.6 n'est pas nécessaire.

Nom :